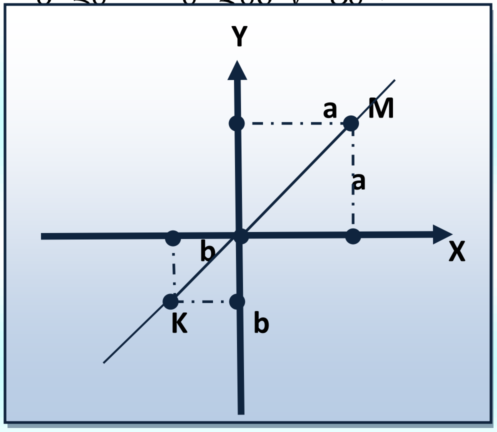
წერტილთა გეომეტრიული ადგილი

სიბრტყის იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომელთაც ერთი და იგივე თვისება გააჩნიათ, ეწოდება წერტილთა გეომეტრიული ადგილი

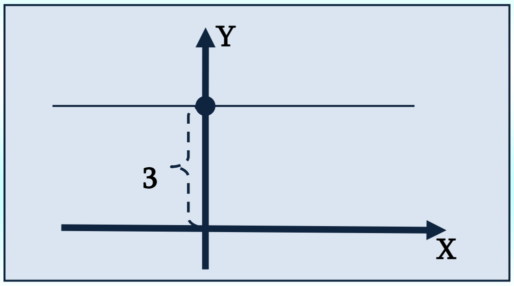
განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი. ავიღოთ წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევები. მაგალითად Y=X ან Y= a, სადაც Y, X ცვლადებია, ხოლო a რაიმე რიცხვია .

1) თუ განვიხილავთ Y= X ფუნქციას და ავაგებთ მის გრაფიკს, მაშინ მივიღებთ შემდეგ წრფეს;



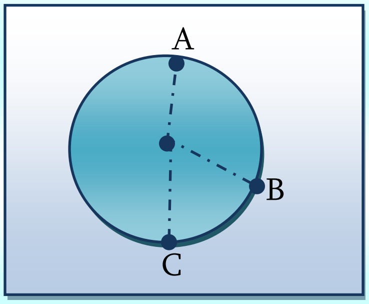
KM წრფის ყველა წერტილს ის თვისება აქვს, რომ ამ წრფის ნებ-ისმიერი წერტილი საკოორდინატო ღერძებიდან თანაბარი მანძილითაა დაშორბული. ამიტომ KM წრფე წარმოადგენს **წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს.**

2) განვიხილოთ წრფე Y= a . დავუშვათ a =3. მაშინ გვექნება ფუნქცია **Y= 3** , რომლის გრაფიკი იქნება **X** ღერძის პარალელური წრფე.



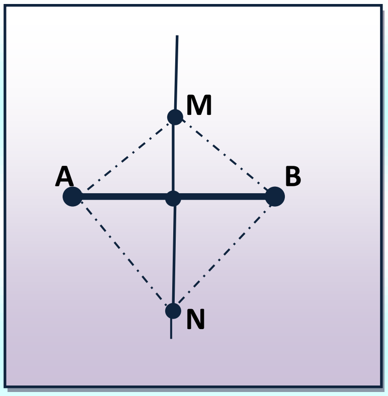
მოცემული წრფის ყველა წერტილს ის თვის-ება აქვს, რომ ისინი X ღერძიდან თანაბარი, სამი ერთეულის ტოლი მანძილითაა და-შორებული, ამიტომ ეს წრფეც **წერტილთა გეომეტრიული ადგილია.**

3) განვიხილოთ ნებისმიერი რადიუსის მქონე წრეწირი .



ცხადია, წრეწირი წერტილთა გეომეტრიული ადგილია, ვინაიდან ნებისმიერი **A, B, C** . . . წერტილები თუ ეკუთვნის წრეწირს, მაშინ ისინი ცენტრიდან თანაბარი მანძილით არიან დაშორებული : OA = OB = OC = . .

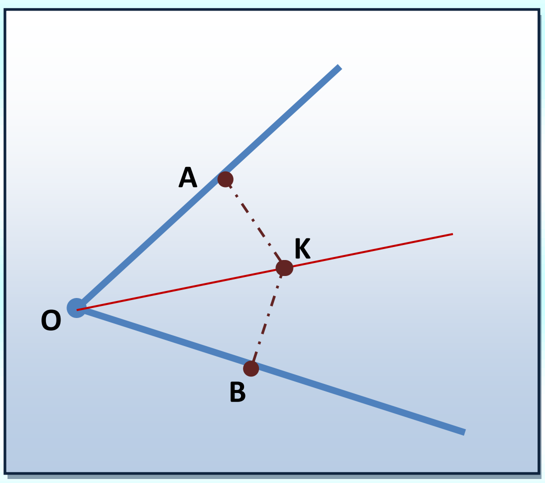
4) ავიღოთ ნებისიერი მონაკვეთი AB და მის შუა წერტილზე ავღმართოთ პერპენდიკულარი (მართობი) .



ეს მართობი **წერტილთა გეომეტრიული ადგი-ლია,** ვინაიდან ამ მართობზე მდებარე ყველა წერტილს ერთი და იგივე თვისება გააჩნია – ისინი მონაკვეთის ბოლოებიდან ერთი და იგივე მანძილით არიან დაშორებული ;

AM = MB ; AN = NB.

5) ავიღოთ რაიმე კუთხე და გავავლოთ მისი ბისექტრისა.



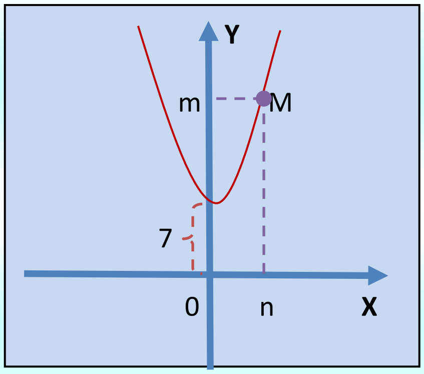
ცხადია, რომ კუთხის ბისექტრისა წარმოადგენს **წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს,** ვინაიდან ბისექტრისაზე მდე-ბარე ყველა წერტილს ერთი და იგივე თვისება ახასიათებს – ისინი თანაბრად არიან დაშორებული კუთხის გვერდე-ბიდან. რომელი K წერტილიც არ უნდა ავიღოთ კუთხის ბისექტრისაზე , ყოვ-ელთვის AK = KB .

წერტილთა რაიმე გეომეტრიული ადგილის საპოვნელად საჭიროა ორი მოთხოვნა გავითვალისწინოთ: ერთის მხრივ მივუთითოთ , რა სიმრავლეს ეკუთვნის მოცემული თვისების მქონე წერტილები, მეორეს მხრივ, უნდა დასაბუთდეს , რომ აღნიშნული სიმრავლის ყველა წერტილს აქვს მოცემული თვისება.

6) გავიხსენოთ , რომ **ax + by + c = 0** სახის ორუცნობიანი განტოლება x და y უცნობების მიმართ, არის წრფივი ორუცნობიანი განტოლება . თუ a, b, c კოეფიციენტებიდან ერთ – ერთი მაინც არ არის ნულის ტოლი, მაშინ ეს დამოკიდებულება **წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს** გამოსახავს. ამ

დამოკიდებულების გრაფიკზე მდებარე ყოველ წერტილს ერთი და იგივე თვისება ახასიათებს. ამ დამოკიდებულების გრაფიკი სიბრტყეზე გამოსახავს წრფეს.

7) მაგალითად, $y = x^2 + 7$ განტოლებით მოცემულ წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე ასე გამოისახება:

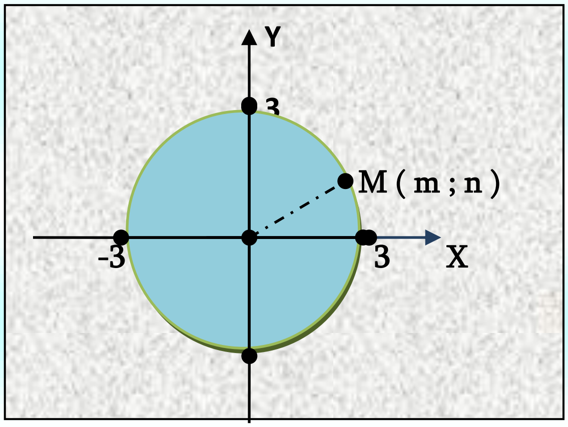


გრაფიკზე გამოსახულ ნებისმიერ M (n : m) წერტილს ერთი და იგივე თვისება ახასიათებს

$$\boxed{m^2 = n^2 + 7 ,}$$

სადაც n და m გრაფიკზე მდებარე M წერტილის კოორდინატებია.

8) $x^2 + y^2 = 9$ განტოლებით მოიცემა წრეწირი, რომლის რადიუსი 3 ერთეულია, ხოლო წრეწირის ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში.



ნახაზზე მოცემულ წრეწირზე მდებარე ყველა წერტილს აქვს ერთი და იგივე თვისება – თვითოეული M (m ; n) წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას $\boxed{m^2 + n^2 = 9.}$

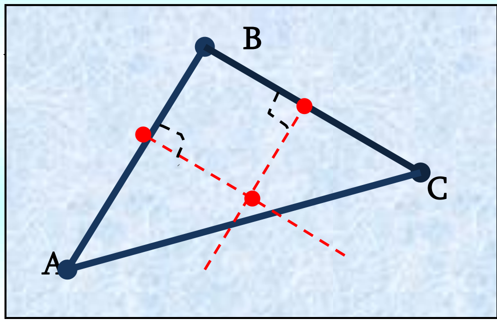
ყველა ასეთი წერტილის ერთობლიობა წერტილთა გეომეტრიული ადგილია.

თუ წრეწირის ცენტრი მოთავსებულია C (a ; b) წერტილში და მისი რადიუსია R , მაშინ ეს წრეწირი წარმოადგენს ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომლებიც C (a ; b) წერტილიდან R – ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული , ანუ ამ წრეწირზე მდებარე ყოველი წერტილი M (x ; y) აკმაყოფილებს პირობას:

$$\boxed{(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2 .}$$

გეომეტრიული აგებების ერთ – ერთი მეთოდი არის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. სწორედ ფარგლითა და სახაზავით სამკუთხედის, წრეწირის, კუთხის აგებისას გამოიყენება წერტილთა გეომეტრიული ადგილის მეთოდი. განვიხილოთ ამ მეთოდის გამოყენების რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1: მოცემულია სამი A, B, C წერტილი. ისინი ერთ წრფეს არ ეკუთვნის. ავაგოთ წრეწირი, რომელიც ამ წერტილებზე გადის. ეს ამოცანა იმას

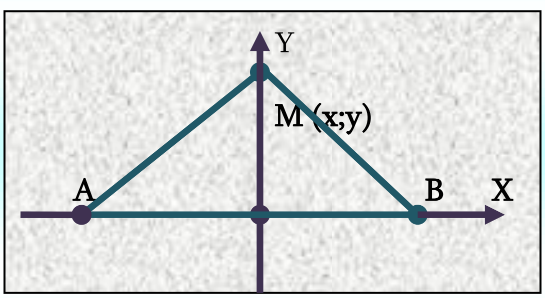


შევაერთოთ ეს წერტილები. შეიქმნა სამკუთხედი ABC წერტილი , საიდანაც A და B წერტილი თანაბრადაა დაშორებული, მდებარეობს AB მონაკვეთის შუა მართობზე. ანალოგიურად, BC მონაკვეთის შუა მართობის ნებისმიერი წერტილი თანაბრად არის დაშორებული BC მონაკვეთის ბოლოებიდან.

ფარგლითა და სახაზავით AB, B C მონაკვეთების შუა მართობების აგებით და მათი გადაკვეთის წერტილის მოძებნით მივალთ საძიებელ პასუხამდე. ეს წერტილი არის ერთადერთი, საიდანც სამი A , B , C წერტილი თანაბარი მანძილით არიან დაშორებული, შესაბამისად სამკუთხედი ABC აღმოჩნდება წრეწირში ჩახაზული.

მაგალითი 2 : ვიპოვოთ სიბრტყის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიდანაც ამავე სიბრტყის ორ მოცემულ A და B წერტილებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი 64 ერთეულის ტოლია, ამასთან AB = 6.

შევარჩიოთ საკოორდინატო სისტემა ისე, რომ X ღერძი ა A და B წერტილზე გადიოდეს. Y ღერძი გავატაროთ AB მონაკვეთის შუა წერტილზე.



მაშინ A და B წერტილების კოორდინატები იქნება A (-3 ; 0) ; B (3 : 0). ნებისმიერი **M (x ; y)** წერტილისათვის მანძილების კვადრატები იქნება: $MA^2 = (x+3)^2 + (y+0)^2$; $MB^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2$. მაშინ

$$MA^2 + MB^2 = 64; \quad (x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 64;$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 = 64; \quad 2x^2 + 18 + 2y^2 = 64; \quad 2x^2 + 2y^2 = 46,$$

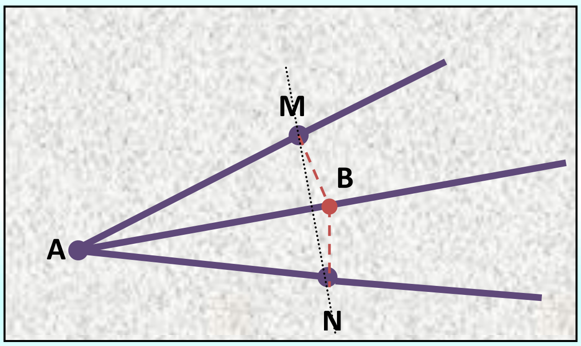
საიდანაც $\boxed{x^2 + y^2 = 23\ .}$ მივიღეთ მეორე ხარისხის ორუცნობიანი განტოლება.

იგი იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილია, რომელიც წარმოადგენს წრეწირს რადიუსით $\sqrt{23}$. წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა.

ამრიგად, გეომეტრიული ფიგურა სიბრტყეზე , რომელიც მოცემულია ორუცნობიანი განტოლებით, სადაც x -ს და y-ს ან ორივეს მეორე ხარისხებში შეიცავს (უფრო მაღალ ხარისხებში კი არ შეიცავს) , წარმოადგენს წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს.

დ ა ვ ა ლ ე ბ ე ბ ი

30.1. მოცემულ ნახაზზე $\angle MAB = \angle NAB$. მაშინ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს წრფე



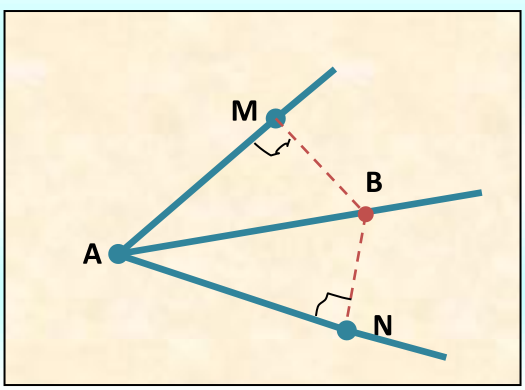
1) AM

2) AB

3) AN

4) MN

30.2. მოცემულ ნახაზზე $\angle MAB = \angle NAB$. ცნობილია, რომ $MB \perp AM$ და $NB \perp AN$. მაშინ



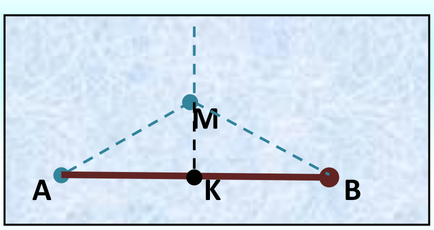
1) AM = MB

2) AB = AM

3) AN = BN

4) MB = BN

30.3. ცნობილია , რომ მოცემულ ნახაზზე AM = MB და $MK \perp AB$, მაშინ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს წრფე

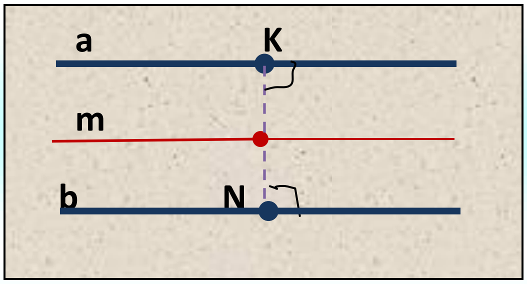


1) MK　　2) AM　　3) MB　　4) AB

30.4. იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც მოცემული წერტილიდან ერთი და იგივე მანძილითაა დაშორებული, არის

1) წრფე　　2) მონაკვეთი　　3) ბისექტრისა　　4) წრეწირი

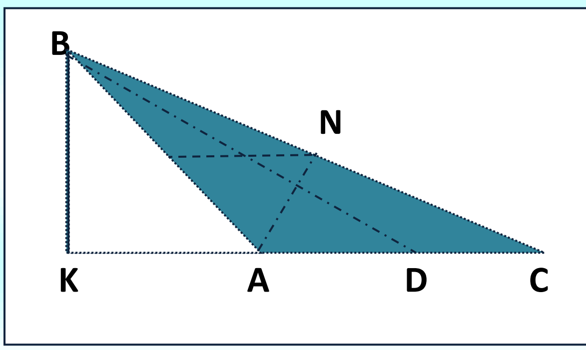
30.5. იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც ერთი და იმავე მანძილით არის დაშორებული ორი პარალელური წრფიდან, არის



1) a წრფე　　2) b წრფე

3) m წრფე　　4) KN წრფე

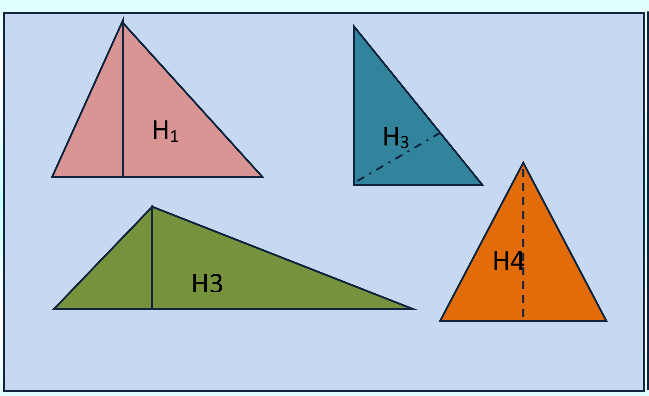
30.6.



ნახაზზე მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომელშიც გავლებულია AC გვერდის სიმაღლე **BK**, B კუთხის ბისექტრისაა **BD,** BC გვერდის მედიანა **AN** და შუა ხაზი **MN.** მოცემული მონაკვეთებიდან რომელი შეიძლება იყოს წერტილთა გეომეტრიული ადგილი?

1) MN　　2) BD　　3) AN　　4) BK

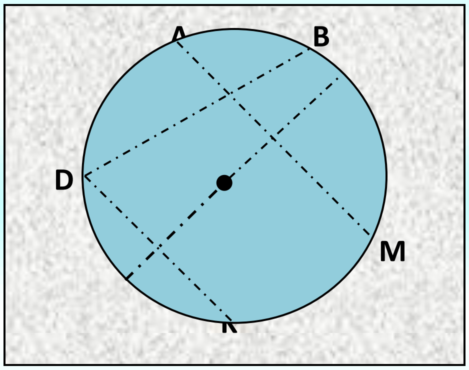
30.7.



ნახაზზე მოცემულია მახვილკუთხა, მართკუთხა, ბლაგვკუთხა და ტოლფერდა სამკუთხედები, რომლებშიც გავლებულია სიმაღლეები შესაბამისად H_1, H_2, H_3, H_4. ამ სიმაღლეებიდან რომელი შეიძლება იყოს წერტილთა გეომეტრიული ადგილი?

1) H_1 **2)** H_2 **3)** H_3 **4)** H_4

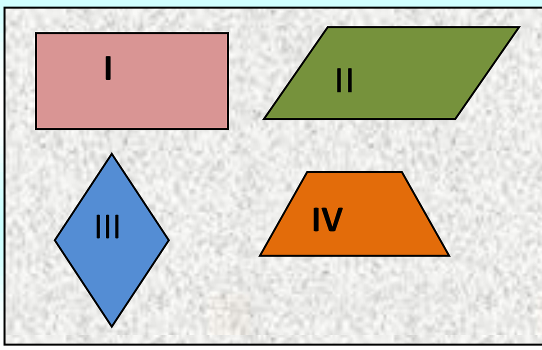
30.8.



ნახაზზე მოცემულია გადამკვეთი ქორდები, სადაც **NC** დიამეტრია. მოცემული ნახაზის მიხედვით, რომელი ქორდა შეიძლება იყოს წერტილთა გეომეტრიული ადგილი?

1) NC **2)** DB **3)** AM **4)** DK

30.9.



ნახაზზე მოცემულია ოთხკუთხედები: **I** – მართკუთხედი, **II** – პარალელოგრამი, **III** – რომბი, **IV** – ტოლფერდა ტრაპეცია. მოცემული ოთხკუთხედებიდან,

1) მართკუთხედის **2)** პარალელოგრამის

3) რომბის **4)** ტოლფერდა ტრაპეციის

30.10. იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლის მიმართაც ღერძული სიმეტრიისას ნებისმიერ **$A(n\,;m)$** წერტილს შეესაბამება **$A_1(m\,;n)$** წერტილი, არის წრფე, რომლის განტოლებაა

1) $y=x$ **2)** $y=2x$ **3)** $y=-x$ **4)** $y=-1$

30.11. $x^2-2x+y^2=0$ განტოლებით მოცემული წრეწირის ცენტრია

1) $(-1\,;0)$ **2)** $(1\,;0)$ **3)** $(1\,;1)$ **4)** $(-1\,;1)$

30.12. $x^2-2x+y^2=0$ განტოლებით მოცემული წრეწირის რადიუსია

1) 1 **2)** 3 **3)** 4 **4)** 5

30.13. $x\,y = 7$ განტოლება განსაზღვრავს

1) პარაბოლას **2)** ჰიპერბოლას

3) წრეწირს **4)** წრფეთა წყვილს

30.14. $x^2 - 5x + 6 = y$ განტოლება განსაზღვრავს

1) პარაბოლას **2)** ჰიპერბოლას

3) წრეწირს **4)** წრფეთა წყვილს

30.15. თუ $(-1 ; 4)$ არის $xy = k$ განტოლების ერთ – ერთი ამონახსნი , მაშინ $k =$

1) - 8 **2)** - 4 **3)** - 2 **4)** $-\frac{1}{4}$

30.16. $x^2 + y^2 = 25$ განტოლების ერთერთი ამონახსნია

1) $(-5 ; -1)$ **2)** $(5 ; 2)$ **3)** $(-5 ; 2)$ **4)** $(4 ; 3)$

30.17. $x^2 + y^2 = 169$ განტოლების ამონახსნია $(5 ; m)$. იპოვეთ m .

1) $m = \pm 5$ **2)** $m = \pm 13$ **3)** $m = \pm 12$ **4)** $m = \pm 10$

30.18. x ღერძზე იპოვეთ წერტილი , რომელიც ტოლი მანძილებითაა დაშორებული $(1 : 2)$ და $(2 : 3)$ წერტილებიდან.

1) $(-5 ; -1)$ **2)** $(0 ; 4)$ **3)** $(-5 ; 2)$ **4)** $(4 ; 0)$

30.19. იპოვეთ წერტილი, რომელიც ტოლი მანძილებითაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან და $(6 : 12)$ წერტილიდან.

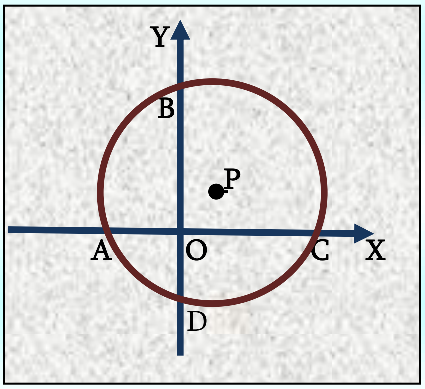
1) $(15 ; 0)$ **2)** $(0 ; 15)$ **3)** $(-15 ; 0)$ **4)** $(4 ; 0)$

30.20. მოცემულია $A(-2;-2)$ და $C(-8;6)$ წერტილები. დაწერეთ A წერტილზე გამავალი იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრია C წერტილი.

1) $(x+8)^2+(y-6)^2=100$ **2)** $(x+8)^2+(y-6)^2=64$

3) $(x+8)^2+(y-6)^2=36$ **4)** $(x+8)^2+(y-6)^2=144$

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წრეწირი, რომლის ცენტრის კოორდინატებია $P(1;1)$, ხოლო რადიუსი არის $\sqrt{5}$. მოცემული ნახაზის



მიხედვით **უპასუხეთ კითხვებს:**

30.21. მანძილი წრეწირის ცენტრიდან კოორდინატთა სათავემდე იქნება, ანუ $OP=$

1) $\sqrt{2}$ **2)** $2\sqrt{2}$

3) $3\sqrt{2}$ **4)** $\sqrt{5}$

30.22. A წერტილის კოორდინატებია

1) $(0;0)$ **2)** $(1;1)$ **3)** $(-1;-1)$ **4)** $(-1;0)$

30.23. B წერტილის კოორდინატებია

1) $(0;0)$ **2)** $(1;1)$ **3)** $(0;3)$ **4)** $(-1;1)$

30.24. C წერტილის კოორდინატებია

1) $(3;0)$ **2)** $(1;1)$ **3)** $(-1;-1)$ **4)** $(-1;1)$

30.25. D წერტილის კოორდინატებია

1) $(0;0)$ **2)** $(0;-1)$ **3)** $(-1;-1)$ **4)** $(-1;1)$

ავტორები: გულიკო საბაძე, ნუნუ წიკლაური **gulikosabadze@gmail.com**